

۱- بحث انتخاب ۳ کتاب از ۵ کتاب و ۴ کتاب از ۶ کتاب کاملاً روشن است. حال قرار دادن ۳ کتاب اول و ۴ کتاب دوم بصورت یک در میان بصورت زیر خواهد بود:

$$4! \times 3! = \begin{array}{cccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{دوم} & & \text{دوم} & & \text{دوم} & & \text{دوم} \\ \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & \text{اول} & & \text{اول} & & \text{اول} & & \end{array}$$

در مکان اول کتاب اول را نمی‌توانیم قرار دهیم چون در مکان ۶ و ۷ دو کتاب دوم کنار هم خواهد بود پس در مکان اول می‌توانیم فقط کتاب دوم قرار دهیم پس چهار انتخاب داریم و در سایر مکانها انتخاب کم می‌شود:

$$\Rightarrow \binom{5}{3} \times \binom{6}{4} \times 4! \times 3!$$

جابجایی کتابها در قفسه انتخاب کتابها

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۲- تعداد رمزها برابر است با تعداد اعداد سه رقمی فرد با تکرار ارقام: $9 \times 9 \times 5 \rightarrow \boxed{9} \boxed{9} \boxed{5}$ زمان لازم برحسب دقیقه: $9 \times 9 \times 5 \times 2 = 810$ و همین مدت برحسب ساعت $\frac{810}{60} = 13.5$ و گزینه ۴ جواب صحیح است.

۳- باید توجه داشت که اگر حرف «ی» در اول کلمه قرار گیرد، حرف نقطه‌دار خواهد بود. سه خانه خالی $\square \square \square$ را در نظر بگیرید. در خانه اول یکی از حروف «م»، «ه»، «و»، «ر» می‌تواند قرار گیرد یعنی ۴ امکان. خانه دوم با یکی از ۵ حرف باقی مانده یعنی به ۵ طریق پر می‌شود و خانه سوم با یکی از ۴ حرف باقی مانده می‌تواند پر شود. بنابر قانون ضرب $4 \times 5 \times 4 = 80$ حالت جمعاً وجود دارد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۴- با هر سه نقطه متمایز می‌توان یک مثلث ساخت پس تعداد مثلثها برابر است با تعداد حالاتی که می‌توان از بین ۵ نقطه سه تا را انتخاب کرد یعنی $10 = \frac{5 \times 4}{2} = \frac{5!}{3!2!}$. پس گزینه ۴ جواب صحیح است.

۵- اگر جعبه‌ها را در یک ردیف فرض کنیم اولین مهره را به ۱۰ طریق می‌توان داخل جعبه‌ها قرار داد و دومین مهره را به ۹ طریق و سومین مهره را با ۸ طریق و الی آخر تعداد طرق ممکن برابر است با $\frac{10!}{4!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

۶- دستورهای محاسبه ترکیب و تبدیل را جایگزین می‌کنیم داریم:

$$\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-2)!2!} = 36 \Rightarrow n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n(n-1) = 72 \Rightarrow n = 9$$

حال $n = 9$ را جایگزین $\binom{n}{6}$ می‌کنیم که حاصل بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۷- نوع انتخاب در این سؤال ترکیب است و بطریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\binom{5}{2} = \text{تعداد طرف انتخاب دانش آموز}$$

$$\binom{4}{3} = \text{تعداد طرف انتخاب دانشجو}$$

از آنجا که در مقابل هر انتخاب اول انتخاب دوم وجود دارد پس داریم:

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{3} = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{4!}{3!1!} = 40$$

یعنی گزینه ۴ صحیح است.

۸- هر مثلث از انتخاب سه خط دلخواه از ۵ خط موجود ایجاد می‌شود پس تعداد جوابها برابر انتخاب ۳ خط از ۵ خط

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ می‌باشد پس داریم. یعنی گزینه ۱ صحیح است.}$$

۹- ۵ نقطه روی دایره می‌توانند تشکیل مثلث و چهارضلعی و پنج‌ضلعی محاطی دهند که مجموع این اشکال کل چندضلعیهای محاطی را خواهد داد.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

تعداد سه ضلعیها بصورت انتخاب هر ۳ نقطه از ۵ نقطه می‌باشد یعنی:

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \times 1!} = 5$$

تعداد چهار ضلعیها بصورت انتخاب هر ۴ نقطه از ۵ نقطه می‌باشد یعنی:

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5! \times 0!} = 1$$

تعداد پنج ضلعیها بصورت انتخاب هر ۵ نقطه از ۵ نقطه می‌باشد یعنی:

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 10 + 5 + 1 = 16$$

پس تعداد کل برابر مجموع حالت‌های فوق یعنی:

پس گزینه ۳ صحیح است.

۱۰- حاصلضرب n عدد متوالی از ۱ تا n بصورت $n!$ می‌باشد و عبارت $(n+1)!$ برابر $(n+1)n!$ و یا برابر $(n+1)n(n-1)!$ می‌باشد پس با توجه به این قضیه شروع به ساده‌سازی می‌کنیم داریم:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

۱۱- عددی بر ۵ بخش پذیر است که یکان آن صفر یا ۵ باشد پس:

چون صفر انتخاب شده است، حق انتخاب از بین ۵، ۳ و ۲ در سایر مکانها بصورت زیر است.

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{5} = 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ \boxed{2} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{5} = 2 \times 2 \times 1 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 + 4 = 10 \text{ عدد}$$

چون ۵ انتخاب شده است، حق انتخاب از بین ۳، ۲ و ۰ در سایر مکانها بصورت فوق است.

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۱۲- در هر سری الفبایی شماره‌گذاری $9 \times 9 = 81$ اتومبیل (بدون رقم صفر) شماره‌گذاری می‌شوند. از طرفی

$1000 = 12 \times 81 + 28$ بنابراین اتومبیل هزارم در رده سیزدهم حروف یعنی حرف «ز» می‌باشد. چون به ازاء هر دهه

۹ اتومبیل شماره‌گذاری می‌شود پس با تقسیم ۲۸ بر ۹ داریم $28 = 3 \times 9 + 1$. پس اتومبیل مذکور، اولین اتومبیل

دهه چهارم است یعنی عدد ۴۱. بنابراین شماره اتومبیل ۴۱ - ز می‌باشد و گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۳- کتابهای ریاضی را یک دسته و با کتابهای ادبی روی هم ۵ کتاب در نظر می‌گیریم حال تعداد جایجایی‌ها $5!$ می‌باشد اما کتابهای ریاضی را که در یک دسته قرار دارند نیز میتوان به $3!$ حالت جایجا نمود پس کلاً $5! \times 3!$ حالت داریم یعنی به 720 حالت. پس گزینه ۴ صحیح است.

۱۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^3 b^2}{3! \times 2!} \rightarrow 3! \times 2! \rightarrow \text{جابه جایی } a \text{ و } b \\ \frac{3 a^2 b}{3! \times 2!} \rightarrow 3! \times 2 \\ \frac{3^2 a b}{3! \times 2!} \rightarrow 3! \times 2 \end{array} \right\} + \rightarrow 36$$

حالت های کلی

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید توجه داشت که رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر شود. با توجه به اینکه رقم ۴ سه بار تکرار شده:

$$1 = \text{تعداد اعداد سه رقمی شامل } 3 \text{ تا } 4$$

$$5 = \text{تعداد اعداد سه رقمی شامل دو عدد } 4 \Rightarrow (4, 4), (4, 4), (4, 4)$$

$$4 = \text{تعداد اعداد سه رقمی شامل یک عدد } 4 = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

بنابراین تعداد کل اعداد برابر با $1 + 5 + 4 = 10$ می‌باشد.

۱۶- n نفر را به $(n-1)!$ حالت مختلف می‌توان دور یک میز نشاند. بنابراین برای ۵ نفر $4! = 24 = (5-1)!$ حالت مختلف می‌توان در نظر گرفت. لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۷- هر سکه دو حالت می‌تواند داشته باشد. وقتی n سکه را به هوا پرتاب می‌کنیم، طبق اصل شمارش، تعداد حالات برابر با $2^n = 2 \times 2 \times \dots \times 2$ حالت می‌شود. پس برای شش سکه تعداد حالات برابر 2^6 می‌باشد. لذا گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f = \{(1, 1)(2, -)(3, -)(4, -)\}$$

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

سه مکان باقیمانده را بطور غیرتکراری با ۴ عدد مانده پر می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \text{DADADADAD} \quad 4! \times 5! \\ \text{ADADADADD} \quad 4! \times 5! \\ \text{DDADADADA} \quad 4! \times 5! \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \times 4! \times 5!$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\binom{10}{4} - \binom{10}{3} = \frac{10!}{4! \times 6!} - \frac{10!}{3! \times 7!} = 10! \left(\frac{7-4}{4! \times 7!} \right) = 10! \left(\frac{3}{4! \times 7!} \right) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 3}{4!} = 90$$

۲۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. کل اعداد ۵ رقمی با این ارقام: $4 \times 5^4 = 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 4 \times 5^4$ «صفر نمی‌تواند رقم

$$\text{اول باشد.} \text{ اعداد } 5 \text{ رقمی با این ارقام که شامل رقم } 3 \text{ نباشد: } 3 \times 4^4 = 3 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

$$1732 = 2500 - 768 = 4 \times 5^4 - 3 \times 4^4 = \text{اعداد } 5 \text{ رقمی که حداقل یکبار } 3 \text{ ظاهر شده باشد.}$$